stichting
mathematisch
centrum

AFDELING MATHEMATISCHE BESLISKUNDE BC 3/72 JUNI

JAC.M. ANTHONISSE, J.H. VAN FRANKENHUYSEN

SAMENVATTING LESSEN BESLISKUNDE VOOR DE CURSUS WETENSCHAPPELIJK REKENEN A

mei 1971 - juni 1971

2e ongewijzigde druk

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O.), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

1e druk: juli 1971

Inhoud

	blz.
1. Inleiding	1
2. Lineaire programmering	3
3. Grafentheorie	12
4. Volgorde problemen	14
5. Netwerkplanning	16
6. Simulatie	19
7. Dynamische programmering	28
8. Voorraadtheorie	37
9. Wachttijden	40
Opgaven	42
Literatuur	51

1. Inleiding

Beschouw de volgende beslissingssituatie.
In een aantal plaatsen liggen voorraden van een produkt opgeslagen. Vanuit deze plaatsen moet het produkt over verschillende vraagpunten worden verdeeld. De voorraad in elk voorraadpunt en de vraag in elk vraagpunt is bekend. Totale vraag = totaal aanbod. Verder is voor elke combinatie (voorraadpunt, vraagpunt) bekend wat de transportkosten per eenheid produkt zijn.
Gevraagd wordt de voorraden zó te transporteren dat de totale transportkosten minimaal zijn.
Dit praktische probleem kan als volgt worden vertaald in een wiskundig optimum vraagstuk.

Stel a_i = voorraad in (voorraad)punt i $(i=1,\ldots,m)$

b_j = vraag in (vraag)punt j $(j=1,\ldots,n)$

c_{ij} = transportkosten van i naar j (per eenheid produkt).

Deze symbolen stellen de gegevens van het probleem voor.
Zij

x_{ij} = het (onbekende) aantal eenheden dat van i naar j wordt vervoerd.

Nu luidt het optimum vraagstuk:

$$\text{minimaliseer} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij},$$

onder de voorwaarden

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i=1,\ldots,m),$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j=1,\ldots,n),$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n).$$

Bovenstaande formules vormen een model van de beslissingssituatie.

Er zijn algorithmen die elk probleem van deze vorm kunnen oplossen, deze algorithmen bepalen, op grond van a_i, b_j en c_{ij}, optimale waarden voor de x_{ij}. De optimale x_{ij} kunnen als oplossing van het oorspronkelijke praktische probleem worden geïnterpreteerd.
Het transportprobleem is een voorbeeld van een zogenaamd éénstaps-beslissingsprobleem, er behoeft slechts één beslissing, vastgelegd in de x_{ij}, te worden genomen.
Er zijn ook meerstaps-beslissingsproblemen, waarbij het er om gaat een reeks samenhangende beslissingen te nemen. Hierbij kan elke beslissing van invloed zijn op de toekomstige beslissingssituaties. In deze gevallen wordt niet één optimale beslissing gezocht, maar een optimale strategie, dat is een regel die voor elke situatie een zodanige beslissing aanwijst dat de aangewezen beslissingen tesamen juist het optimale resultaat geven.
Behalve naar het onderscheid één- of meerstaps kunnen beslissingsproblemen ook worden ingedeeld in deterministische en stochastische problemen.
Veelal kan een praktisch probleem op verschillende manieren in een wiskundig probleem worden vertaald. In het algemeen zal men proberen het probleem te herleiden tot een waarvoor een algorithme beschikbaar is, zelfs als het model hierdoor iets aan werkelijkheidswaarde verliest. Omdat het model niet de werkelijkheid is, maar slechts (een deel van) de werkelijkheid beschrijft, mag de oplossing van het wiskundige probleem niet zonder meer als oplossing van het werkelijke probleem worden gezien. De gevonden oplossing moet worden terugvertaald in termen van het oorspronkelijke probleem en aan de hand van de gemaakte model-veronderstellingen kritisch worden bezien.
Een wiskundig model kan vaak voor verschillende praktische problemen worden gebruikt. Transportproblemen met totale vraag $\neq$ totaal aanbod kunnen door de introduktie van een fictief vraag- of aanbods-punt in de bovengegeven vorm worden gebracht. Het model kan ook worden gebruikt voor de toewijzing van sollicitanten aan vacatures.

2. Lineaire Programmering

Het algemene lineaire programmeringsprobleem kan worden geformuleerd als:

$$\text{maximaliseer} \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j \, x_j$$

onder de voorwaarden

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j \leq b_i \qquad (i=1,\ldots,m_1),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j = b_i \qquad (i=m_1+1,\ldots,m),$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,\ldots,n),$$

ofwel: zoek het maximum van een lineaire functie, waarbij de variabelen niet-negatief zijn en voldoen aan een stelsel lineaire ongelijkheden en gelijkheden.
Voorlopig zal worden aangenomen dat $m_1 = m$ en $b_i \geq 0$, dus er zijn alleen ongelijkheden, met niet-negatief rechterlid.
Door aan elke ongelijkheid een verschil-variabele toe te voegen ontstaat een stelsel gelijkheden.

$$z - \sum_{j=1}^{n} c_j \, x_j = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \qquad (i=1,\ldots,m),$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,\ldots,n+m).$$

De gelijkheden kunnen worden herschreven als:

$$z = 0 - \left(\sum_{j=1}^{n} (-c_j) \, x_j \right)$$

$$x_{n+i} = b_i - \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j \right) \qquad (i=1,\ldots,m).$$

Hieruit is direct een oplossing van het stelsel af te lezen: $z = 0$, $x_{n+i} = b_i$ $(i=1,\ldots,m)$, $x_j = 0$ $(j=1,\ldots,n)$. Omdat $b_i \geq 0$ zijn alle $x_j \geq 0$ en deze oplossing van het stelsel is een toegelaten oplossing van het LP probleem.

De variabelen x_{n+i} zijn, in deze vorm van het stelsel, uitgedrukt in de overige variabelen.

In elke stap van de simplex-methode voor de oplossing van LP problemen zijn de variabelen in twee groepen verdeeld. Er is een groep basis-variabelen en een groep niet-basis-variabelen. De basis-variabelen zijn uitgedrukt in de niet-basis-variabelen. Door elke niet-basis-variabele de waarde 0 te geven wordt een toegelaten oplossing van het LP probleem gevonden.

Elke simplex-stap bestaat uit het uitwisselen van een basis-variabele tegen een niet-basis-variabele, zodanig dat de objectfunctie niet daalt en geen variabele negatief wordt.

Stel dat, na een aantal stappen, het stelsel is herschreven als

$$z = \bar{a}_{00} - \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{0j}\, x_{r_j}$$

$$x_{s_i} = \bar{a}_{i0} - \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij}\, x_{r_j} \qquad (i=1,\ldots,m).$$

Hierin zijn $x_{s_1},\ldots,x_{s_m}$ de basis-variabelen en $x_{r_1},\ldots,x_{r_n}$ de niet-basis-variabelen. $x_{s_i} = \bar{a}_{i0}$, $x_{r_j} = 0$ is een toegelaten oplossing met $z = \bar{a}_{00}$ als waarde van de objectfunctie. Door x_{r_j} positief te maken, bijv. $x_{r_j} = t$, stijgt z met $-t\bar{a}_{0j}$, dit is een niet-negatief bedrag als $\bar{a}_{0j} < 0$.

Bewerking 1 in elke simplex stap is: zoek een niet-basis-variabele met $\bar{a}_{0j} < 0$. In het algemeen kiest men de variabele met minimale $\bar{a}_{0j}$. Zijn alle $\bar{a}_{0j} \geq 0$ dan is de huidige oplossing optimaal.

Zij x_{r_j} de gekozen variabele.

Door x_{r_j} positief te maken, bijv. $x_r = t$ gaat $x_{s_i} = \bar{a}_{i0}$ over in

$$x_{s_i} = \bar{a}_{i0} - t\bar{a}_i \quad ,$$

dus x_{s_i} daalt als $\bar{a}_{i\underline{j}} > 0$ en stijgt als $a_{i\underline{j}} < 0$.
Omdat geen variabele negatief mag worden moet t voldoen aan $\bar{a}_{i0} \geq t\bar{a}_{i\underline{j}}$, ofwel $t \leq \frac{\bar{a}_{i0}}{\bar{a}_{i\underline{j}}}$, voor alle i met $\bar{a}_{i\underline{j}} > 0$. Hieruit volgt dat $x_{r_{\underline{j}}}$ niet groter gemaakt mag worden dan

$$\underset{i}{\text{minimum}} \left(\frac{\bar{a}_{i0}}{\bar{a}_{i\underline{j}}} \mid \bar{a}_{i\underline{j}} > 0,\ i=1,\ldots,m\right),$$

Daar z stijgt door $x_{r_{\underline{j}}}$ positief te maken kan het geen kwaad $x_{r_{\underline{j}}}$ zo groot mogelijk te maken.
Het minimum wordt voor zekere waarde(n) van i aangenomen. Voor die i geldt

$$x_{s_i} = \bar{a}_{i0} - \frac{\bar{a}_{i0}}{\bar{a}_{i\underline{j}}} \bar{a}_{i\underline{j}} = 0,$$

deze variabele wordt uit de basis verwijdert, $x_{r_{\underline{j}}}$ wordt in de basis gebracht.
Bewerking 2 in elke simplex-stap is: zoek een i waarvoor $\frac{\bar{a}_{i0}}{\bar{a}_{i\underline{j}}}$ minimaal is, het minimum wordt genomen over alle $i \geq 1$ met $\bar{a}_{i\underline{j}} > 0$. Als alle $\bar{a}_{i\underline{j}} \leq 0$ is het minimum onbepaald. In dit geval heeft het probleem geen eindige oplossing.
Zij $\underline{i}$ de gekozen i.
Nu bekend is dat $x_{s_{\underline{i}}}$ de basis verlaat en dat $x_{r_{\underline{j}}}$ in de basis komt moet de nieuwe verzameling basis-variabelen worden uitgedrukt in de nieuwe verzameling niet-basis-variabelen.
Beschouw de vergelijking

$$x_{s_{\underline{i}}} = a_{\underline{i}0} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq\underline{j}}}^{n} \bar{a}_{\underline{i}j}\, x_{r_j} - a_{\underline{i}\underline{j}}\, x_{r_{\underline{j}}},$$

ofwel

$$x_{r_{\underline{j}}} = \frac{a_{\underline{i}0}}{a_{\underline{i}\underline{j}}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq\underline{j}}}^{n} \frac{\bar{a}_{\underline{i}j}}{\bar{a}_{\underline{i}\underline{j}}}\, x_{r_j} - \frac{1}{a_{\underline{i}\underline{j}}}\, x_{s_{\underline{i}}},$$

deze uitdrukking kan in

$$z = \bar{a}_{00} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq \underline{j}}}^{n} \bar{a}_{0j}\, x_{r_j} - \bar{a}_{0\underline{j}}\, x_{r_{\underline{j}}}$$

$$x_{s_i} = \bar{a}_{i0} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq j}}^{n} \bar{a}_{ij}\, x_{r_j} - \bar{a}_{i\underline{j}}\, x_{r_{\underline{j}}} \qquad (i=1,\ldots,m;\ i\neq \underline{i})$$

worden gesubstitueerd en leidt dan tot het gewenste resultaat.
Bewerking 3 in elke simplex-stap is: druk de nieuwe verzameling basisvariabelen uit in de nieuwe verzameling overige variabelen.
Na een eindig aantal stappen wordt een optimale oplossing van het LP probleem gevonden, of wordt gesignaleerd dat er geen (eindige) oplossing bestaat.
Aan de hand van een voorbeeld zal een en ander verder worden gedetailleerd.
Beschouw het probleem:

$$\text{maximaliseer } z = -1.5x_1 + 1.5x_2 + 2.5x_3$$

onder de voorwaarden

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &\leq 0 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 &\leq 0 \\ x_2 &\leq 30 \\ x_j &\geq 0 \qquad (j=1,2,3). \end{aligned}$$

Verschilvariabelen invoeren:

$$\text{maximaliseer } z = -1.5x_1 + 1.5x_2 + 2.5x_3$$

onder

$$-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$-x_1 - x_2 + 3x_3 + x_5 = 0$$

$$x_2 + x_6 = 30$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,\ldots,6).$$

De triviale oplossing $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_n = x_5 = 0$, $x_6 = 30$, $z = 0$ is direct af te lezen uit:

$$z = 0 - (1.5x_1 - 1.5x_2 - 2.5x_3)$$

$$x_4 = 0 - (-x_1 + x_2 + x_3)$$

$$x_5 = 0 - (-x_1 - x_2 + 3x_3)$$

$$x_6 = 30 - (x_2),$$

en uit het tableau:

		1	2	3	4	5	6	
z	0	1.5	-1.5	-2.5	0	0	0	← rij 0
x_4	0	-1	1	1	1	0	0	
x_5	0	-1	-1	3	0	1	0	
x_6	30	0	1	0	0	0	1	

In verband met de uitvoering van bewerking 3 zijn ook kolommen voor de basis-variabelen opgenomen.

Stap 1, bewerking 1:

het kleinste getal in rij 0 is -2.5, x_3 wordt in de basis gebracht.

Stap 1, bewerking 2:

zowel x_4 als x_5 is candidaat om de basis te verlaten, x_5 wordt hier gekozen. x_6 is geen candidaat.

Stap 1, bewerking 3:

deel de elementen in rij 2 door 3.

		1	2	3	4	5	6
z	0	1.5	-1.5	-2.5	0	0	0
x_4	0	-1	1	1	1	0	0
x_3	0	-1/3	-1/3	1	0	1/3	0
x_6	30	0	1	0	0	0	1

Trek rij 2 zo vaak van de overige rijen af dat alle elementen in kolom x_3 de waarde nul krijgen.

			2	3	4	5	6
z	0	2/3	-7/3	0	0	5/6	0
x_4	0	-2/3	4/3	0	1	-1/3	0
x_3	0	-1/3	-1/3	1	0	1/3	0
x_6	30	0	1	0	0	0	1

Dit tableau correspondeert met

$$
\begin{aligned}
z &= 0 - (\ 2/3x_1 - 7/3x_2 + 5/6x_5) \\
x_4 &= 0 - (-2/3x_1 + 4/3x_2 - 1/3x_5) \\
x_5 &= 0 - (-1/3x_1 - 1/3x_2 + 1/3x_5) \\
x_6 &= 30 - (\qquad\qquad x_2 \qquad\qquad)
\end{aligned}
$$

Stap 1 is hiermee voltooid.

Stap 2, bewerking 1:

het minimum in rij 0 is -7/3, dus x_2 komt in de basis.

Stap 2, bewerking 2:

de te beschouwen quotiënten zijn 0/(4/3) en 30/1, dus x_4 verlaat de basis.

Stap 2, bewerking 3:

rij 1 wordt door 4/3 gedeeld en daarna zo vaak van de overige rijen afgetrokken dat alle elementen in kolom x_2 de waarde nul krijgen.

		1	2	3	4	5	6
z	0	-1/2	0	0	7/4	1/4	0
x_2	0	-1/2	1	0	3/4	-1/4	0
x_3	0	-1/2	0	1	1/4	1/4	0
x_6	30	1/2	0	0	-3/4	1/4	1

Stap 3, bewerking 1:
x_1 komt in de basis.
Stap 3, bewerking 2:
x_6 verlaat de basis.
Stap 3, bewerking 3:
deel rij 3 door 1/2 en trek deze daarna voldoende vaak van de overige rijen af.

		1	2	3	4	5	6
z	30	0	0	0	1	1/2	1
x_2	30	0	1	0	0	0	1
x_3	30	0	0	1	-1/2	1/2	1
x_1	60	1	0	0	-3/2	1/2	2

Stap 4, bewerking 1:
er zijn geen negatieve getallen in rij 0, de optimale oplossing is bereikt en luidt:

$$x_1 = 60, \quad x_2 = 30, \quad x_3 = 30, \quad z = 30.$$

In het bovenstaande is steeds verondersteld dat $m_1 = m$ en $b_i \geq 0$. Niet negatieve rechterleden kunnen steeds eenvoudig worden verkregen. Dan luiden de voorwaarden:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad (i=1,\ldots,m_1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \geq b_i \qquad (i=m_1+1,\ldots,m_2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i \qquad (i=m_2+1,\ldots,m)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,\ldots,n)$$

ofwel, na toevoeging van verschil-variabelen:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j + x_{n+i} = b_i \qquad (i=1,\ldots,m_1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j - x_{n+i} = b_i \qquad (i=m_1+1,\ldots,m_2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i \qquad (i=m_2+1,\ldots,m)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,\ldots,n+m_2).$$

Hieruit is niet direct een toegelaten oplossing af te lezen, het kan ook voorkomen dat de vergelijkingen strijdig zijn.
Introduceer nu de hulp-variabelen y_{n+i} $(i=m_1+1,\ldots,m)$ en herschrijf het stelsel:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j + x_{n+i} = b_i \quad (i=1,\ldots,m_1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j - x_{n+i} + y_{n+i} = b_i \quad (i=m_1+1,\ldots,m_2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j + y_{n+i} = b_i \quad (i=m_2+1,\ldots,m)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,\ldots,n+m)$$

$$y_{n+i} \geq 0 \qquad (i=m_1+1,\ldots,m).$$

Voor dit probleem is een oplossing in niet-negatieve variabelen direct af te lezen, zodat de simplex methode kan worden gestart.
In de eindoplossing moet gelden:

$$y_{n+i} = 0 \qquad (i=m_1+1,\ldots,m),$$

dit wordt bevorderd door, in plaats van de oorspronkelijke object functie, te maximaliseren

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M \sum_{i=m_1+1}^{m} y_{n+i} ,$$

waarin M een zeer groot getal voorstelt.
Het is dus zeer duur om een hulp-variabele positief te laten worden (of blijven).
Zodra alle $y_{n+i} = 0$ is de nieuwe objectfunctie gelijk aan de oorspronkelijke, een hulp-variabele die uit de basis is verwijderd zal daar (wegens M) niet in terugkeren.
Als in de eindoplossing van het gewijzigde probleem een positieve hulp-variabele voorkomt is de conclusie dat het oorspronkelijke probleem geen oplossing heeft.
Naast de hierbeschreven simplex-methode zijn andere simplex-technieken ontwikkeld die beter geschikt zijn voor grotere problemen.

3. Grafentheorie

Als tussen (sommige) tweetallen uit een verzameling objecten een relatie bestaat kan de situatie als volgt in beeld worden gebracht:

Hier is elk object voorgesteld door een punt, het bestaan van een relatie wordt aangegeven door een verbindingslijn (kant) tussen de punten. Punt 6 is geïsoleerd, punt 5 is een eindpunt, dit punt heeft alleen een relatie met 4. De punten 1, 2, 3 liggen op een cirkel. Structuren van dit soort heten grafen. Als aan elke relatie een richting is toegevoegd spreekt men van een gerichte graaf, en van pijlen in plaats van kanten.

Hier liggen 1 en 2 op een cirkel, 3, 4 en 5 daarentegen niet. De pijl van 6 naar 6 heet een lus. Een pijl $i \to j$ zou kunnen betekenen dat persoon i veel waardering heeft voor j (sociogram).
Vele problemen kunnen worden vertaald in het vinden van een graaf met een bepaalde eigenschap of het vinden van een deelverzameling punten, kanten of pijlen met een gewenste eigenschap.

Voorbeeld:
Gevraagd wordt een wegennet tussen n steden aan te leggen, op zodanige wijze dat elk tweetal steden onderling bereikbaar is.
Zij k_{ij} = de kosten van een directe verbinding tussen i en j, $k_{ij} = k_{ji}$.
Wat is het goedkoopste wegennet?

Eenvoudig is in te zien dat in het optimale wegennet geen cirkels voorkomen, alle wegen laten verkeer in twee richtingen toe. Als er een cirkel is kan hieruit een directe verbinding worden verwijderd, de kosten verminderen, alle steden blijven onderling bereikbaar.

Een niet gerichte graaf waarin tussen elk tweetal punten precies één pad bestaat heet een boom.
Het probleem is nu de goedkoopste boom door de punten 1 t/m n te vinden.
De volgende algorithme leidt tot het juiste, optimale, antwoord. Er is echter een snellere methode bekend.
Zoek het minimum van de nog niet geschrapte getallen k_{ij}. Stel k_{gh} is dit minimum. Als door het leggen van de verbinding (g,h) een cirkel zou ontstaan schrap dan de getallen k_{gh} en k_{hg} en begin opnieuw.
Als geen cirkel ontstaat leg dan de verbinding, schrap de getallen en begin opnieuw.
Nadat n-1 verbindingen zijn gelegd is een optimale boom gevonden.

Voorbeeld:

kostentabel

	1	2	3	4	5
1	0				
2	1	0			
3	1	1	0		
4	2	3	2	0	
5	4	2	3	2	0

Eerst wordt de verbinding (2,1) gelegd, dan verbinding (3,1). Nu levert (3,2) minimale kosten, maar mag niet worden gelegd omdat een cirkel zou ontstaan. Verbinding (4,1) mag wel, daarna is (4,3) verboden, (5,2) is toegestaan en voltooid de boom.

Het is duidelijk dat ook andere bomen dezelfde minimale kosten hebben.

4. Volgorde problemen

De volgorde waarin bepaalde activiteiten worden uitgevoerd is vaak van grote invloed op de kosten. Een bekend volgorde probleem is het zogenaamde 'handelsreizigersprobleem'.
Een handelsreiziger woont in plaats 1, moet de plaatsen 2,3,...,n bezoeken en keert dan naar zijn woonplaats terug. Hij vraagt zich af in welke volgorde hij de bezoeken moet afleggen om zijn totale reistijd te minimaliseren. Als t_{ij} de reistijd van plaats i naar plaats j voorstelt kan zijn probleem worden geformuleerd als:
Zoek een zodanige permutatie $p_1,p_2,\ldots,p_n$ van de getallen 1,2,...,n dat

$$t_{p_1p_2} + t_{p_2p_3} + \ldots + t_{p_{n-1}p_n} + t_{p_np_1}$$

minimaal is.
Er zijn verschillende algorithmen voor de oplossing van dit probleem bekend, de rekentijd kan echter van probleem tot probleem zeer uiteenlopen.
Voor het nu te bespreken volgorde probleem zal een zeer eenvoudig uit te voeren algorithme worden gegeven.
Elk van n produkten moet twee bewerkingen ondergaan, eerst bewerking 1, dan bewerking 2. Het is onmogelijk op meerdere produkten tegelijkertijd dezelfde bewerking uit te voeren.
t_{ij} = voor produkt i benodigde tijd bij bewerking j (i=1,...,n; j=1,2).
Gevraagd wordt de produkten zodanig te ordenen dat de totale tijd dat aan deze produkten wordt gewerkt minimaal is.
Als de produkten in de volgorde 1,2,...,n worden afgehandeld is de eerste bewerking van produkt 1 na $T_{11} = t_{11}$ tijdseenheden voltooid, de tweede bewerking na $T_{12} = t_{11} + t_{12}$ tijdseenheden. Bewerking 1 van produkt 2 is klaar op $T_{21} = T_{11} + t_{21}$, bewerking 2 op $T_{22} = \max(T_{12},T_{21}) + t_{22}$.
Het maximum moet worden genomen omdat bewerking 2 van het voorgaande produkt moet zijn afgelopen.
De eerste bewerking van het laatste produkt is gereed op $T_{n1} = T_{n-1,1} + t_{n1}$, de tweede bewerking op $T_{b2} = \max(T_{n-1,2},T_{n1}) + t_{n2}$. Dit laatste getal moet worden geminimaliseerd.

Bepaal het kleinste van de nog niet geschrapte getallen t_{ij}, zij t_{kl} dit minimum.
Als l = 1 zet dan produkt k vooraan in de rij, maar achter de reeds geplaatste produkten.
Als l = 2 zet dan produkt k achteraan in de rij, maar voor de reeds geplaatste produkten.

Schrap t_{k1} en t_{k2}, begin opnieuw.
Op deze wijze wordt in n stappen een optimale volgorde gevonden.

Voorbeeld: bewerking

stap 1

produkten

	1	2
1	3	2
2	7	6
3	4	5
4	1	2

volgorde: (4,.,.,.)

stap 2

	1	2
1	3	2
2	7	6
3	4	5

volgorde: (4,.,.,1)

stap 3

	1	2
2	7	6
3	4	5

volgorde: (4,3,.,1)

stap 4

	1	2
2	7	6

volgorde (4,3,2,1)

De minimale bewerkingstijd is 20.

	1	2	bewerking gereed 1	2
4	1	2	1	3
3	4	5	5	10
2	7	6	12	18
1	3	2	15	20

5. Netwerkplanning

De uitvoering van een project kan veelal worden gesplitst in de uitvoering van deelactiviteiten. Deze deelactiviteiten kunnen niet alle tegelijkertijd worden uitgevoerd; er zijn technisch bepaalde volgorde restricties, bijvoorbeeld: activiteit A moet zijn voltooid alvorens aan activiteit B kan worden begonnen. Grafisch kan deze restrictie worden voorgesteld als:

Het gehele project kan op deze wijze in beeld worden gebracht, er ontstaat een netwerk dat de volgorde relaties beschrijft, bijvoorbeeld:

Hierin heeft activiteit 1 geen voorgangers en geen opvolgers en kan tegelijk met elke andere activiteit worden uitgevoerd. Activiteit 2 heeft 3 als opvolger, 4 heeft geen voorgangers, 5 en 6 zijn de opvolgers van 4 en ook de voorgangers van 7.
Eenvoudig is in te zien dat een netwerk van een project geen cirkels kan bevatten.
Dit betekent dat de activiteiten zodanig kunnen worden genummerd dat het beginpunt van elke pijl een lager nummer heeft dan zijn eindpunt. Deze nummering kan worden gevonden door eerst de punten zonder voorgangers vanaf 1 te nummeren, bijvoorbeeld $1,2,\ldots,k_1$, dan de punten die uitsluitend voorgangers met een van de nummers 1 t/m k_1 hebben te nummeren van k_1+1 t/m k_2, dan de punten die uitsluitend voorgangers met een van

de nummers 1 t/m k_2 hebben te nummeren van k_2+1 t/m k_3 enzovoort.
Voor elke activiteit is een (schatting van de) uitvoeringstijd bekend.
Wij zijn geïntereseerd in de minimale tijd waarin het project kan worden voltooid.
Geen activiteit kan eerder beginnen dan na voltooiïng van zijn voorgangers.
Het vroegste begintijdstip van activiteiten zonder voorgangers is 0, het vroegste voltooiïngstijdstip van zulke activiteiten is hun bewerkingstijd.
In het algemeen is het vroegste begintijdstip van een activiteit gelijk aan het maximum van de vroegste volgtooiïngstijdstippen over zijn voorgangers.
Het vroegste voltooiïngstijdstip is gelijk aan het vroegste begintijdstip plus uitvoeringstijd.
Het maximum (T) van de vroegste voltooïngstijdstippen over de activiteiten zonder opvolgers is de minimale tijdsduur waarin het project kan worden uitgevoerd.
Deze minimale tijdsduur is gelijk aan de lengte van het langste pad in het netwerk, waarbij aan elk punt een lengte (= uitvoeringstijd) is toegekend.
Om het project in de minimale tijd (T) te voltooien, moeten alle activiteiten zonder opvolgers op hun laatste voltooiïngstijdstip T gereed zijn. Het laatste begintijdstip van zo'n activiteit is T minus zijn uitvoeringstijd.
In het algemeen is het laatse voltooiïngstijdstip van een activiteit gelijk aan het minimum van de laatste begintijdstippen over zijn opvolgers.
Het laatste begintijdstip is gelijk aan laatste voltooiïngstijdstip minus uitvoeringstijd.
Als de activiteiten op de bovenomschreven wijze zijn genummerd kunnen de vroegste en de laatste begin- en voltooiïngstijdstippen eenvoudig worden berekend.
Zij t_i = uitvoeringstijd activiteit i (i=1,2,...,n).
Stel $u_i = 0$, u_i wordt vervangen door het vroegste begintijdstip van activiteit i. Bij het begin van stap i (i=2,...,n) hebben $u_1,\ldots,u_i$ hun definitieve waarde reeds gekregen.

Stap i: vervang, voor elke opvolger j van i, de huidige waarde van n_j door het maximum van die huidige waarde en $u_i + t_i$.
Stel $v_i = T$, v_i wordt vervangen door het laatste voltooiingstijdstip van activiteit i. Bij het begin van stap i (i = n-1,...,1) hebben $v_{i+1},\ldots,v_n$ hun definitieve waarde reeds gekregen.

Stap i: vervang de huidige waarde van v_i door het minimum van $v_j - t_j$, genomen over alle opvolgers j van i.

Voorbeeld:

berekening u_i

			stap							
activiteit	tijd	opvolgers	0	2	3	4	5	6	7	vroegste begintijd
1	1	-	0							0
2	1	3	0							0
3	2	-	0	1						1
4	1	5,6	0							0
5	1	7	0			1				1
6	2	7	0			1				1
7	1	-	0				2	3		3 → T = 4

berekening v_i

			stap							
activiteit	tijd	opvolgers	8	6	5	4	3	2	1	laatste uitvoeringstijd
1	1	-	4							4
2	1	3	4					2		2
3	2	-	4							4
4	1	5,6	4			1				1
5	1	7	4		3					3
6	2	7	4	3						3
7	1	-	4							4

De activiteiten waarvoor het vroegste en laatste begintijdstip samenvallen heten de kritieke activiteiten. Elke vertraging in een kritieke activiteit resulteert in vertraging van het gehele project.

6. Simulatie

Voorlopig nemen we als definitie: simulatie is het naspelen van processen. Een voorbeeld is het waterloopkundig laboratorium waar met een schaalmodel van de deltawerken proeven genomen worden. Een ander voorbeeld zijn de proeven met vliegtuigen in windtunnels. Een gemeenschappelijk punt in deze voorbeelden is dat er een fysische samenhang is tussen het proces en de simulatie daarvan; beiden, proces en simulatie verlopen continu in de tijd.
De laatste jaren probeert men ook vaak om processen op een digitale computer na te spelen. Sommige processen lenen zich daar uitstekend toe. Er is dan geen fysische samenhang meer tussen proces en simulatie; de simulatie is niet continu, maar heeft een discreet karakter.
Over deze laatste soort simulatie gaat dit hoofdstuk. Voor ons kan dus de definitie gelden: simulatie is het naspelen van processen op een digitale computer (in principe kunnen de berekeningen natuurlijk ook met de hand uitgevoerd worden). Voorwaarde is dat het proces goed bekend is, en zich in een computerprogramma laat vangen.

Ter illustratie van het type proces volgen drie voorbeelden.

Voorbeeld 1

In een postkantoor met één loket komen mensen binnen, die zich in een wachtrij voor het loket opstellen. Wanneer zij aan de beurt zijn, worden ze geholpen en gaan daarna weer naar buiten. De binnenkomsten van nieuwe klanten vinden op onregelmatige tijdstippen plaats. We nemen aan dat de tijd tussen twee binnenkomsten een bepaalde kansverdeling heeft. Ook de helptijd is stochastisch en heeft een kansverdeling, die onafhankelijk is van de binnenkomsten.
Dit voorbeeld, het meest elementaire wachttijdprobleem, kan gesimuleerd worden, waardoor gemiddelde wachttijd en gemiddelde rijlengte voor het loket bepaald kunnen worden. Deze kunnen ook langs theoretische weg bepaald worden m.b.v. de wachttijdtheorie.

Voorbeeld 2

Een scheepvaartbedrijf wil haar kade in de Amsterdamse haven uitbreiden. Van tijd tot tijd arriveren schepen om te laden en te lossen. Vinden zij geen plaats aan de kade, dan moeten zij uitwijken of wachten, wat extra kosten met zich meebrengt. Anderzijds kost elke meter kade-uitbreiding veel geld. Men vraagt zich nu af welke aanleg-, uitwijk- en wachtkosten een bepaalde uitbreiding met zich meebrengt. Wanneer het aankomsten-patroon van de schepen bekend is, het aantal kademeters dat zij ieder nodig hebben en hun los- en laadtijd, en de politiek die m.b.t. wachten of uitwijken gevoerd wordt, kan het laad- en losproces van de schepen gesimuleerd worden voor iedere willekeurige uitbreiding van de kade en kunnen de daarbij optredende kosten berekend worden.

Voorbeeld 3

Een groot bedrijf heeft besloten tot de bouw van een kantoorflat van 20 verdiepingen. Ervaringen in soortgelijke gebouwen hebben aangetoond dat de benodigde liftencapaciteit dikwijls onderschat werd. Vooral tijdens spitsuren 's ochtends, tussen de middag en 's avonds treden dan zeer lange wachttijden op. Om teveel ongemak te voorkomen besluit de direktie een onderzoek in te laten stellen naar het vermogen en de besturing van het geplande systeem van 6 liften. De bezetting van het gebouw ligt al vast, zodat per verdieping bekend is hoeveel mensen er zullen gaan werken.
In een simulatiemodel kan nu de liftbeweging en het passagierstransport nagespeeld worden. Daarmee worden besturingssystemen die de samenwerking tussen de liften regelen op hun waarde getest en kan b.v. het effect bekeken worden van de aankomstdiscipline (wanneer de mensen 's ochtends ongedisciplineerd aankomen, heeft dit een grotere spreiding dus een betere verwerking bij de liften tot gevolg; idem 's avonds).

In deze voorbeelden traden kansverdelingen op. Bij de simulatie zullen daar dus ook trekkingen uit gedaan moeten worden. Men zal zich afvragen hoe deze trekkingen uit kansverdelingen bij computerberekeningen gerealiseerd worden. Dit gebeurt in twee stappen.
In de eerste stap worden "willekeurige getallen tussen 0 en 1" gegenereerd.

In de tweede stap worden uit deze getallen door een geschikte transformatie trekkingen verkregen uit de gewenste kansverdeling.

Eerste stap

De willekeurige getallen tussen 0 en 1 moeten voldoen aan twee eigenschappen: zij moeten onderling onafhankelijk zijn, dus niet merkbaar samenhangen, en zij moeten homogeen verdeeld zijn, d.w.z. de kans dat het gegenereerde getal zal liggen in het interval (a,b), $0 \leq a < b \leq 1$, moet gelijk zijn aan b-a. Getallen die aan deze twee eigenschappen voldoen noemt men aselekte getallen (engels: random numbers); dit zijn in feite dus onderling onafhankelijke trekkingen uit de homogene verdeling.
Een veel gebruikte methode om aselekte getallen in een computer te genereren is de volgende: begin met een getal y_0, tussen 0 en m. Bereken y_1 uit y_0, y_2 uit y_1, enz. volgens de formule:

$$y_i = ay_{i-1} + c \quad \text{(modulo m)} \qquad i = 1,2,\ldots .$$

Hierin zijn a, c en m vaste getallen. m is zeer groot en meestal een tweevoud b.v. 2^{26}; a en c zijn getallen tussen 0 en m. De getallen y_i/m neemt men nu als aselekte getallen. Het merkwaardige is dat wanneer y_{i-1} bekend is, met zekerheid y_i voorspeld kan worden, terwijl y_i/m toch doorgaat voor een aselekt getal. Daarom noemt men deze getallen y_i/m pseudo-aselekte getallen.
Een bezwaar is dat de rij zich zou kunnen herhalen: als voor zekere n y_n toevallig weer gelijk aan y_0 is geldt: $y_{n+1} = y_1$, $y_{n+2} = y_2$ enz.;
Als a, c en m aan bepaalde voorwaarden, waarop wij niet nader ingaan, voldoen, is de lengte van de cyclus altijd m, welk getal men ook als y_0 kiest. Dan treden dus juist alle getallen tussen 0 en m één keer op, voordat een getal voor het eerst herhaald wordt; dit is dan juist weer y_0, dus $y_m = y_0$, $y_{m+1} = y_1$ etc.
De bovenstaande methode heet: multiplicatieve methode van Lehmer.

Tweede stap

De tweede stap bestaat uit een geschikte transformatie van pseudo-aselekte getallen, waardoor een trekking uit de gewenste kansverdeling verkregen

wordt. We lichten dit aan de hand van een paar voorbeelden toe:

1. Gevraagd zijn trekkingen van $\underline{x}$ met $P(\underline{x}=0) = \frac{1}{2}$ en $P(\underline{x}=1) = \frac{1}{2}$. We trekken nu een pseudo-aselekt getal u. Daaruit wordt een trekking van $\underline{x}$ verkregen door de transformatie

$$0 < u \leq \frac{1}{2} \rightarrow x = 0$$

$$\frac{1}{2} < u \leq 1 \rightarrow x = 1$$

2. $\underline{x}$ is nu een discrete stochastische grootheid, die de waarden $x_1,\ldots,x_n$ kan aannemen met kansen $p_1,p_2,\ldots,p_n$ dus

$$P(\underline{x}=x_i) = p_i \qquad i = 1,\ldots,n \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

We stellen:

$$u_i = \sum_{j=1}^{i} p_j \qquad i = 1,\ldots,n$$

$$u_0 = 0.$$

Als u een pseudo-aselekt getal is, dan wordt daaruit een trekking van $\underline{x}$ verkregen door de transformatie:

$$u \in (u_{i-1},u_i] \rightarrow x = x_i \ .$$

Deze transformatie is in feite geheel analoog aan die van 1. Het volgende plaatje is een illustratie van de methode.
$\underline{x}$ kan de waarden 3, 5, 6, 8 en 9 aannemen met kansen $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$.

De trekkingen u 0.215, 0.432, 0.928, 0.156 leveren voor x achtereenvolgens op: 5, 8, 9, 3.

3. Gevraagd trekkingen van een continue stochast $\underline{x}$. Stel dat x een trekking van $\underline{x}$ is. Dan is de kans dat $\underline{x} \leq x$ is een getal tussen 0 en 1. Dit getal is een zuiver aselect getal (ga na!). Deze kans dat $\underline{x} \leq x$ is, is ook een funktie van x. Deze heet de verdelingsfunktie van $\underline{x}$, en wordt altijd voorgesteld door F(x); dus $F(x) = P(\underline{x} \leq x)$.
We deden dus een trekking x van de stochastische grootheid $\underline{x}$.
$F(x) = P(\underline{x} \leq x)$ is dan een trekking uit de homogene verdeling.
We draaien nu de zaak om! We beginnen met een trekking uit de homogene verdeling n.l. een pseudo-aselekt getal u. We stellen u = F(x) en berekenen daaruit x. Daarmee hebben we dan een trekking x van de stochastische grootheid $\underline{x}$ gekregen:

$$x = F^{-1}(u).$$

Voorwaarde is dat van de stochastische grootheid, waarvan men een trekking wil hebben, de inverse F^{-1} van de verdelingsfunktie F bekend is.
Als voorbeeld nemen we de exponentiële verdeling met parameter λ, waarvoor geldt

$$P(\underline{x} \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

We nemen een pseudo-aselekt getal u en stellen $u = 1 - e^{-\lambda x}$, waaruit volgt:

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-u).$$

Nu uit de doeken gedaan is, hoe in de computer uit kansverdelingen getrokken kan worden, is de voortschrijdende tijd het volgende probleem. Hoe wordt in de drie genoemde voorbeelden (postkantoor, kade en liften) het verloop van het proces in de tijd bijgehouden?
Er zijn twee methoden:

a. Op equidistante tijdstippen, b.v. van seconde tot seconde, wordt het gehele proces bijgehouden door de in die seconde optredende gebeurtenissen te registreren en de daardoor veroorzaakte veranderingen uit te voeren.

b. Men kan zich ook beperken tot die tijdstippen, waarop in het proces een gebeurtenis plaats vindt, die van invloed is op de gang van zaken Deze tijdstippen liggen niet van te voren vast, maar worden tijdens het simuleren "gevonden". Deze methode noemt men "next event simulation".

Beide methodes kunnen aan de hand van het postkantoor verduidelijkt worden.

Methode a. We gaan elke seconde naar het proces (postkantoor) kijken. De gebeurtenissen die kunnen optreden zijn: een binnenkomst van een nieuwe klant of een vertrek van een geholpen klant. Om vast te kunnen stellen of zij inderdaad optreden moeten we de kans op die gebeurtenissen in die seconde weten. Wanneer een gebeurtenis b.v. een binnenkomst in die seconde inderdaad optreedt, wordt de rijlengte één groter, het totaal aantal binnengekomen klanten wordt één opgehoogd; kortom alle veranderingen die een binnenkomst met zich meebrengt worden uitgevoerd.
In dit voorbeeld is methode a niet zo handig omdat er vaak geen enkele gebeurtenis in een seconde zal optreden, zodat er veel overbodig rekenwerk verricht wordt. Methode a wordt vooral gebruikt bij naar de tijd gediscretiseerde continue processen, en bij processen die te complex zijn voor next event simulation.

Methode b. Deze methode wordt gebruikt wanneer het proces zuiver discreet verandert (zoals in ons geval door een binnenkomst of een vertrek) en wanneer het tijdstip waarop de volgende gebeurtenis plaats vindt eenvoudig vastgesteld kan worden.
In ons voorbeeld moeten bekend zijn: de kansverdeling van de tijd die tussen twee binnenkomsten verloopt, en de kansverdeling van de helptijd. Tijdens de simulatie zorgen we er steeds voor te weten wanneer de volgende binnenkomst (tb) en het volgende vertrek (tv) plaatsvinden. Treedt b.v. de volgende binnenkomst het eerst op (tb < tv), dan schuift de gesimuleerde tijd op naar tb. Vervolgens worden de veranderingen die deze

binnenkomst tot gevolg heeft uitgevoerd: de rijlengte wordt één verhoogd, het totaal aantal binnengekomen klanten wordt één opgehoogd enz. Tevens wordt uit de kansverdeling van de tijd tussen twee binnenkomsten een trekking gedaan, die wordt opgeteld bij tb. Dit is de nieuwe tb. Vervolgens schuift de tijd weer op naar min (tb, tv).

We stellen een flow diagram op van de simulatie van het postkantoor volgens methode b.
De grootheden die de toestand van het postkantoor beschrijven zijn:

t	gesimuleerde tijd
tb	tijdstip van de eerstvolgende binnenkomst.
tv	tijdstip van het eerstvolgende vertrek.
N	aantal binnengekomen klanten tot nu toe
n	lengte wachtrij
TW	gezamenlijke wachttijd van de klanten voor het loket tot nu toe.
TH	tijd dat het loket bediende.

Verder gebruiken we nog:

trek b	aselekte trekking uit de kansverdeling van de tijd tussen twee binnenkomsten
trek h	aselekte trekking uit de kansverdeling van de helptijd
tincr	hulpvariabele (= variabel tijdincrement).

Natuurlijk moeten nog een kop en een staart aan dit flow diagram gebreid worden. De kop, die voorafgegaan moet worden door een specifikatie van trek b en trek h, zou er als volgt uit kunnen zien:

Er wordt dus met een leeg loket begonnen. Als lengte van de simulatie zou men M binnenkomsten kunnen nemen. Op plaats A komt dan de test te staan:

De voordelen van simulatie zijn duidelijk: een proces op een computer naspelen is in de regel veel goedkoper dan het proces zelf; bovendien geeft simulatie de vrijheid om ingrepen in het proces te doen die in de praktijk niet realiseerbaar zijn. Een ander voordeel is de reproduceerbaarheid. De nadelen treden vooral bij stochastische problemen naar voren. Wordt dezelfde simulatie steeds met een andere rij pseudo-aselecte getallen uitgevoerd, dan zijn de antwoorden steeds verschillend. Bovendien heeft simulatie het nadeel dat het geen kwalitatief inzicht in de oplossing van het probleem geeft. In het algemeen geldt dus: pas geen simulatie toe als het antwoord ook berekend kan worden; wees op je hoede voor de variatie in het antwoord als in het probleem stochastische variabelen optreden.

7. Dynamische Programmering

Voorbeeld 1

Een reiziger is onderweg van stad 1 naar stad 10. Hij heeft nog vier dagreizen voor de boeg, maar is vermoeid, zodat hij graag de kortste route kiest naar zijn bestemming. Hij moet daarom elke ochtend zorgvuldig de plaats kiezen waarnaar hij die avond zal gaan.
Het schema van alle mogelijke routes is:

De afstanden tussen de plaatsen zijn:

	2	3	4
1	7	9	8

	5	6	7
2	10	7	9
3	6	5	7
4	7	4	8

	8	9
5	4	7
6	9	6
7	6	6

	10
8	4
9	5

Oplossing:

a Een keuze die voor de hand ligt is om elke dag naar de dichtsbijgelegen volgende plaats te reizen. De route is dan 1 → 2 → 6 → 9 → 10. Dit is echter niet de beste route. Uit de cijfers blijkt dat reizen naar stad 2 erg ongunstig is, omdat dan de volgende dagreis langer zal zijn. Zo is het beter om via stad 4 naar stad 6 te reizen: 1 → 4 → 6 heeft een afstand 12 en 1 → 2 → 6 een afstand 14.

b Een tweede mogelijkheid is om alle trajecten door te rekenen. Dit zijn er in totaal 18, wat leidt tot veel overbodig rekenwerk.

c We behandelen nu een slimme rekenmethode; deze verloopt in 4 stappen.
Stap 1. Stel de reiziger moet nog één dagmars afleggen. Hij is dus in stad 8 of stad 9. Zijn afstand naar het eindpunt bedraagt dan:

vanuit	minimale afstand naar stad 10
8	4
9	5

Stap 2. We gaan een dag terug en nemen aan dat de reiziger nog 2 dagmarsen voor de boeg heeft. Hij kan zich bevinden in stad 5, 6 of 7. Stel hij is in stad 5. Hij kan dan reizen naar stad 8 (afstand 4, daarna nog 4) of naar stad 9 (afstand 7, daarna nog 5). Aangenomen dat hij in stad 5 is, zal hij dus het beste via stad 8 kunnen gaan. De af te leggen afstand is dan 4+4 = 8.
Evenzo kunnen we de beste beslissing nemen voor het geval de reiziger in stad 6 is: reizen via stad 9 met afstand 6+5 is beter dan reizen via stad 8, met afstand 9+4.
Voor stad 7 is de beste beslissing te reizen via stad 8; de afstand is dan nog 10. In tabel:

vanuit	minimale afstand naar stad 10	via
5	8	8
6	11	9
7	10	8

Stap 3. We gaan weer een dag terug en nemen aan dat de reiziger zich in een van de steden 2, 3 of 4 bevindt, met nog 3 dagreizen voor de boeg. Stel hij is in stad 2. Dan kan hij reizen via stad 5 (afstand 10, daarna nog 8, zie vorige tabel), of via stad 6 (afstand 7, daarna nog 11), of via stad 7 (afstand 9, daarna nog 10).
Hij zal, aangenomen dat hij in stad 2 is, dus de beslissing nemen om te reizen via stad 5 of 6, met minimale afstand 18 tot het einde.
Evenzo kunnen we voor het vertrek uit stad 3 of 4 de beste route bepalen. Doe dit zelf als oefening. Zo vinden we de volgende tabel:

vanuit	minimale afstand naar stad 10	via
2	18	5 of 6
3	14	5
4	15	5 of 6

Stap 4. Het is nu duidelijk wat ons te doen staat. We gaan weer een dagmars terug en belanden zo in stad 1. We bepalen de beste route vanuit stad 1 met behulp van de zojuist uitgerekende tabel: reizen via stad 2 duurt 7+18, via stad 3 duurt het 9+14 en via stad 4 is het 8+15. De beste keuze vanuit stad 1 is dus stad 3 of 4 met minimale lengte 23. In tabel:

vanuit	minimale afstand naar stad 10	via
1	23	3 of 4

Einde stap 4. We weten nu dat langs de korste route de afstand 23 is. Terugzoekend in de tabellen zien we de beste routes; allen met lengte 23:

$$\text{van 1 naar} \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} 3 \text{ naar } 5 \\ 4 \text{ naar } \left\{ \begin{array}{l} 5 \\ 6 \text{ naar } 9 \end{array} \right. \end{array} \right\} \text{naar } 8 \end{array} \right\} \text{naar } 10.$$

De oplossingsmethode die we bij dit probleem gebruikten heet: dynamische programmering (deze naam is vrij willekeurig; de methode zou evengoed bv. recursieve programmering, recursieve berekeningswijze of backtracking kunnen heten).

Het probleem hoeft voor het toepassen van dynamische programmering niet in een standaardvorm gegoten te zijn, zoals b.v. bij lineaire programmering wel het geval is. Wel kunnen enige algemene karakteristieken gegeven worden van problemen die met dynamische programmering opgelost kunnen worden:

1. Het probleem kan in stappen verdeeld worden; in elke stap moet een beslissing genomen worden.
2. In elke stap zijn er een aantal toestanden.
   In Vb.1 zijn de toestanden in een stap b.v. de steden 2, 3 en 4 of de steden 8 en 9.
3. De beslissing die in een bepaalde stap in een toestand genomen wordt, heeft overgang naar een toestand in de volgende stap tot gevolg. (Deze overgang kan stochastisch, dwz. aan kansinvloeden onderhevig zijn).
4. Gegeven de toestand in een bepaalde stap; dan zijn de optimale beslissingen voor de komende stappen onafhankelijk van het verleden.
5. Als n-1 stappen vóór het eind, in elke toestand de optimale beslissing en de minimale kosten (b.v. afstand) bekend zijn, dan volgen daaruit voor alle toestanden in de n-de stap voor het eind de optimale beslissingen en minimale kosten.

Deterministische problemen zoals voorbeeld 1 (problemen zonder kanselementen) kunnen van achteren naar voren <u>èn</u> van voren naar achteren berekend worden met dynamische programmering (ga na!). Stochastische problemen (met kanselementen) kunnen in het algemeen alleen van achteren naar voren berekend worden. Daarom is in bovenstaande 5-punten-karakterisering van "het probleem" van achteren naar voren gewerkt.

Een methode om problemen die voor dynamische programmering in aanmerking komen aan te pakken is:

<u>a</u>. Stel vast of het probleem deterministisch of stochastisch is.
<u>b</u>. Stel de stappen en het aantal daarvan vast.
<u>c</u>. Bepaal de mogelijk toestanden in elke stap.
<u>d</u>. Bepaal de mogelijke beslissingen in elke toestand in elke stap.

<u>Voorbeeld 2</u>

Een Nederlands reisbureau heeft voor 6 jaar een hotel gehuurd in de Italiaanse Dolomieten. 's Winters worden er skireizen georganiseerd en ten behoeve van de gasten zal er dan goed gestookt moeten worden. Een Italiaanse kolenhandelaar uit Bolzano heeft de strijd om dit zesjarig kontrakt gewonnen. Hij mag 6 jaar lang kolen aan het hotel leveren,

tegen een vaste vergoeding per jaar. Is de hoteldirektie echter ontevreden over de kwaliteit van de kolen, dan wordt het kontrakt verbroken en wordt het volgend jaar niets meer betaald.
De handelaar heeft de beschikking over drie soorten kolen:

(1) superkolen, (2) kwaliteitskolen en (3) huishoudkolen.

De superkolen zijn in de inkoop natuurlijk het duurst, daarna kwaliteitskolen, terwijl huishoudkolen goedkoop zijn. De winst op (1) is daardoor kleiner dan op (2) enz. Anderzijds schat hij de kans dat zijn kontrakt verbroken wordt na levering van een jaar superkolen kleiner dan bij kwaliteitskolen en veel kleiner dan bij huishoudkolen. Onderstaande tabel geeft de winst/jaar en de kans op kontraktverbreking:

	winst	kans
superkolen	ƒ 460,--	0.2
kwaliteitskolen	ƒ 810,--	0.4
huishoudkolen	ƒ 1050,--	0.6

Aan het begin van elke nieuwe winter staat de kolenhandelaar weer voor de keus welke kolen hij dit keer zal leveren. Kunt U hem helpen? De handelaar streeft er naar om zijn verwachte (= gemiddelde) winst zo groot mogelijk te maken.

Oplossing. We werken volgens de aanpakmethode abcd.

a. Het probleem is stochastisch.
b. Er zijn 6 stappen. Elke stap bestaat uit één winter.
c. Er zijn in wezen twee toestanden: "de kolenhandelaar levert nog", en "de kolenhandelaar levert niet meer, omdat het kontract opgezegd is". We noemen deze resp. 1 en 0. Deze toestanden bestaan in elke winter vanaf de tweede; in de eerste winter bestaat alleen toestand 1.
d. De beslissing bestaat uit de keuze van de kolensoort.
   1 = superkolen, 2 = kwaliteitskolen, 3 = huishoudkolen.
   Deze beslissingsmogelijkheden zijn in elke winter gelijk, maar bestaan alleen in toestand 1. In toestand 0 zijn er geen beslissingen.

We werken nu weer in 6 stappen het probleem van achteren naar voren af:

Stap 1. Nog 1 jaar te leveren; we zijn dus in de zesde winter. Voor elke mogelijke toestand bepalen we de beste beslissing.
Stel we zijn in toestand 1 (er mag dus nog geleverd worden). Beslissing 3 (huishoudkolen) is de beste, omdat deze de meeste winst oplevert. Na dit jaar loopt het kontrakt toch af, zodat de kolenhandelaar zich geen zorgen over de grote kans 0,6 op kontraktverbreking hoeft te maken. De verwachte winst (in dit geval een zekere winst) is ƒ 1050,--.
Stel de kolenhandelaar is in toestand 0 (er mag niet meer geleverd worden). Nu kan er niets meer verdiend worden. De verwachte winst is dus 0, en er valt ook geen beslissing te nemen.
We maken twee tabellen, één voor de winsten en één voor de beslissingen.

Toestand \ Stap	1
0	0
1	1050,--

I. Optimale opbrengst

Toestand \ Stap	1
0	-
1	3

II. Optimale beslissing

Stap 2. Nog twee jaar te leveren. Is de kolenhandelaar in toestand 0 dan geldt weer: geen winst meer te verwachten in de laatste twee jaar en ook geen beslissing meer te nemen. Dit resultaat kunnen we alvast in de volgende tabellen invullen.
Is de kolenhandelaar in toestand 1, dan staat hij weer voor de beslissing 1, 2 of 3. Deze leveren hem resp. 460, 810 en 1050 gulden direkt op, plus een zekere kans om de laatste winter in toestand 1 te komen, die (zie vorige tabel) ook weer 1050 gulden oplevert.
Stel de man neemt beslissing 1. Hij verdient direkt ƒ 460,--. Zijn kans om in de laatste winter in toestand 1 (met opbrengst 1050) te komen is gegeven n.l. 0.8 en de kans om in toestand 0 (met opbrengst 0) te komen is 0.2. Zijn gemiddelde opbrengst bij beslissing 1 is dus:

$$460 + 0.8 \times 1050 + 0.2 \times 0 = 1300.$$

Zo levert de beslissing 2 hem op: 810 + 0.6 × 1050 + 0.4 × 0 = 1440.
en beslissing 3 is waard 1050 + 0.4 × 1050 + 0.6 × 0 = 1470.
De laatste beslissing heeft dus de grootste verwachte opbrengst nl. 1470. We vullen dit in onderstaande tabel in:

Toestand \ Stap	1	2
0	0	0
1	1050	1470

I. Optimale opbrengst

Toestand \ Stap	1	2
0	-	-
1	3	3

II. Optimale beslissing

Stap 3. We gaan weer een winter terug. Met nog 3 winters voor de boeg moet in elke toestand de beste beslissing genomen worden. Toestand 0 levert nu en in de toekomst (eenmaal in toestand 0 blijft in toestand 0) niets op; er is ook geen beslissing te nemen.
Toestand 1 laat weer 3 beslissingen toe.
Beslissing 1 levert op: 460 direkt + een kans van 0.8 op 1470 (zie vorige tabel) + een kans van 0.2 op 0 (zie ook vorige tabel).
Totaal: 460 + 0.8 × 1470 + 0.2 × 0 = 1636.
Beslissing 2: 810 + 0.6 × 1470 + 0.4 × 0 = 1692
Beslissing 3: 1050+ 0.4 × 1470 + 0.6 × 0 = 1638
De keuze valt dus op beslissing 2.
Het resultaat vullen we weer in tabel I en II in:

Toestand \ Stap	1	2	3
0	0	0	0
1	1050	1470	1692

I. Optimale opbrengst

Toestand \ Stap	1	2	3
0	-	-	-
1	3	3	2

II. Optimale beslissing

Stap 4. Nog 4 winters voor de boeg.
Toestand 0, geen opbrengst, geen beslissing.

Toestand 1, beslissing 1: $460 + 0.8 \times 1692 + 0.2 \times 0 = 1813.60$

2: $810 + 0.6 \times 1692 + 0.4 \times 0 = 1825.20$

3: $1050 + 0.4 \times 1692 + 0.6 \times 0 = 1726.80$

De keuze valt op beslissing 2 in deze toestand.

Stap 5. Nog 5 winters voor de boeg.

Toestand 0: geen opbrengst, geen beslissing.

Toestand 1, beslissing 1: $460 + 0.8 \times 1825.20 + 0.2 \times 0 = 1920.16$

2: $810 + 0.6 \times 1825.20 + 0.4 \times 0 = 1905.12$

3: $1050 + 0.4 \times 1825.20 + 0.6 \times 0 = 1780.08$

De keuze valt op beslissing 1 in deze toestand.

Stap 6. Het begin van het probleem. Er is alleen toestand 1.

Toestand 1, beslissing 1: $460 + 0.8 \times 1920.16 + 0.2 \times 0 = 1996.13$

2: $810 + 0.6 \times 1920.16 + 0.4 \times 0 = 1962.70$

3: $1050 + 0.4 \times 1920.16 + 0.6 \times 0 = 1818.06$

Beslissing 1 is de beste.

We vullen de resultaten van de laatste 3 stappen in de tabellen in:

Toestand \ Stap	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	x
1	1050	1470	1692	1825.20	1920.16	1996.13

I. Optimale opbrengst

Toestand \ Stap	1	2	3	4	5	6
0	-	-	-	-	-	x
1	3	3	2	2	1	1

II. Optimale beslissing

Het type probleem van voorbeeld 1 en 2 dat met dynamische programmering opgelost kan worden noemt men wel: N-stapsbeslissingsproblemen. Een omschrijving van dit type probleem vormen de punten 1 t/m 5 op blz. 31. De problemen kunnen deterministische (Vb.1) of stochastisch (Vb.2) zijn.

Er zijn ook problemen waarbij in een oneindig aantal stappen beslissingen genomen moeten worden. Dat noemt men (deterministische of stochastische) ∞-stapsbelissingsproblemen. Het is duidelijk dat deze problemen enigszins anders opgelost moeten worden, omdat men nu niet meer met de laatste stap kan beginnen en recursief naar voren rekenen.

Van ∞-stapsbeslissingsproblemen kan een 5-punten omschrijving gegeven worden die zeer veel lijkt op die van N-stapsbeslissingsproblemen. De eerste 4 punten gaan zelfs onverkort op. Alleen het vijfde punt moet anders geformuleerd worden. De reden is dat de kosten over de resterende stappen in een ∞-stapsbeslissingsprobleem meestal ook ∞ zijn. We gaan hier echter verder niet op in.

8. Voorraadtheorie

Voorraden treden b.v. op in een produktieproces, waarin permanent een grondstof of halffabrikant nodig is, zodat een voorraad daarvan gewenst is, om het produktieproces op gang te houden, of in de handel, wanneer er voorraad moet zijn om direkt aan een vraag te kunnen voldoen.
Wanneer er vraag is, terwijl de voorraad tot nul gereduceerd is, worden extra kosten gemaakt b.v. boetekosten (het produktieproces moet tijdelijk onderbroken worden) of noodinkoopkosten (tegen ongunstige inkoopprijzen moet aan de vraag van de klant voldaan worden).
Anderzijds zijn voorraden duur. Elke eenheid in voorraad brengt zekere voorraadkosten per tijdseenheid met zich mee. Ook bestelkosten bij elke bijbestelling om de voorraad op peil te houden moeten in rekening gebracht worden.

De voorraadtheorie probeert nu die bestelpolitiek te vinden, die de minste kosten met zich meebrengt. Daarbij moet dus rekening gehouden worden met voorraadkosten, bestelkosten, boetekosten, noodinkoopkosten en alle andere kosten die een rol spelen.
We zullen een eenvoudig voorbeeld van voorraadbeheer uitrekenen.

In een produktieproces is een constante behoefte aan fenolan. Deze stof moet altijd aanwezig zijn, omdat het produktieproces niet onderbroken mag worden. Het gebruik is a/tijdseenheid. Van tijd tot tijd wordt fenolan in het eigen bedrijf gemaakt. Het opzetten van de produktie brengt elke keer de kosten K met zich mee, waarna binnen zeer korte tijd elke gewenste hoeveelheid geproduceerd kan worden tegen de kosten c/eenheid. De voorraadkosten bedragen h per eenheid per tijdseenheid. Gevraagd is de optimale produktiegrootte van fenolan vast te stellen.

Het is duidelijk dat pas met de produktie van nieuw fenolan wordt begonnen als de oude voorraad op is. Dit is het tijdstip $t = 0$. Stel dat er dan een hoeveelheid Q gemaakt wordt. Daarna kan het produktieproces dan voort tot het tijdstip Q/a.
De voorraad op tijdstip t ($0 \leq t \leq Q/a$) noemen we $Q(t)$. Deze bedraagt:

$Q(t) = Q - at$

De kosten die in de tijd Q/a gemaakt worden zijn:

a. Produktiekosten: $K + cQ$

b. Voorraadkosten : $\int_0^{Q/a} h\, Q(t)\, dt = h \int_0^{Q/a} (Q-at)\, dt = h\, Q^2/2a.$

De totale kosten in de periode (0,Q/a) bedragen dus:

$$K + cQ + h\, Q^2/2a.$$

Per tijdseenheid bedragen de kosten:

$$\frac{K + cQ + h\, Q^2/2a}{Q/a} = \frac{aK}{Q} + ac + \frac{hQ}{2}$$

Deze kosten per tijdseenheid gaan we nu minimaliseren. We stellen daartoe $\frac{\partial}{\partial Q} = 0$ en verifiëren $\frac{\partial^2}{\partial Q^2} > 0$.

$$-\frac{aK}{a^2} + \frac{h}{2} = 0$$

zodat $$Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}.$$

Dit is dus de optimale produktiegrootte. De tijd die tussen twee produkties van fenolan verloopt bedraagt:

$$T^* = \frac{Q^*}{a} = \sqrt{\frac{2K}{ah}}.$$

c komt in deze formules niet voor; elke geproduceerde eenheid fenolan kost op elk tijdstip immers evenveel geld.
De variabele kosten per tijdseenheid bedragen voor de optimale bestelgrootte

$$\sqrt{2ahK}$$

voor een willekeurige bestelgrootte zijn deze

$$\frac{aK}{Q} + \frac{hQ}{2} .$$

Opm. 1. In de praktijk moet men meestal rekening houden met een zekere besteltijd t^*, die verloopt tussen het tijdstip waarop de bestelling gedaan wordt om de voorraad aan te vullen en de tijd waarop de goederen binnenkomen. In bovenstaand voorbeeld moet de produktie van fenolan dan aangevangen worden op een tijdstip waarop de voorraad nog at^* is.

Opm. 2. Dikwijls is de vraag bovendien stochastisch. In de praktijk wordt dan vaak de volgende politiek gevolgd; als de voorraad tot een niveau B, de buffervoorraad, gedaald is, dan wordt een vaste hoeveelheid Q bijbesteld. Bij deze strategie neemt men aan dat het vraagpatroon van de klanten een min of meer regelmatig verloop heeft.

9. Wachttijden

Wachttijden treden op vele plaatsen op. In de drie bij simulatie genoemde voorbeelden, postkantoor, kade en liften, vormen wachttijden en het daarbij optredende ongerief de kern van het probleem. De wachttijdtheorie dankt zijn bestaan aan onderzoekingen op het gebied van telefoncentrales, die de Deen Erlang in de eerste 20 jaren van deze eeuw heeft verricht. Vooral na de tweede wereldoorlog is de theorie tot grote bloei gekomen en wordt zij op grote schaal op allerlei problemen toegepast, onder het motto: time is money.
Een kenmerk van wachttijdproblemen is dat kleine oorzaken grote gevolgen hebben: wanneer b.v. bij het postkantoor het aantal binnenkomsten enigszins oploopt kan dat leiden tot een grote toename van de gemiddelde wachttijd. Ook een toename in de spreiding van de helptijd, bij gelijkblijvend gemiddeld, leidt tot een vergroting van de gemiddelde wachttijd.
De wachttijdtheorie bedient zich van het volgende eenvoudige model:

In de wachtkamer zijn "loketten" aanwezig waar de aangekomenen bediend worden. De faktoren die de werking van een dergelijk systeem bepalen zijn:

1) het binnenkomstenpatroon
2) het vertrekpatroon
3) het aantal loketten en de rij discipline.

De rijdiscipline bepaalt welke aangekomenen bij welke loketten geholpen worden.

Het voorbeeld van het postkantoor in hoofdstuk 6, was het meest eenvoudige voorbeeld van zo een wachttijdstituatie. We zullen aan de hand van dit voorbeeld de uitspraak "kleine oorzaken hebben grote gevolgen" toelichten.
Stel dat de tijd tussen twee binnenkomsten een exponentiële verdeling

heeft met verwachting b, en dat ook de helptijd een exponentiële verdeling heeft met verwachting h(b > h).
De bezettingsgraad van het postkantoor is dan:

$$\rho = \frac{h}{b} .$$

De relatieve wachttijd (rw) is de verhouding tussen de wachttijd (w) die een klant gemiddeld in een postkantoor door brengt en de tijd dat hij gemiddeld geholpen wordt aan het loket:

$$rw = \frac{w}{h} .$$

Onder de aanname van exponentiële binnekomstintervallen en helptijden geldt dan:

$$rw = \frac{w}{h} = \frac{\rho}{1 - \rho} .$$

Voor verschillende waarden van de bezettingsgraad levert dat op:

$\rho = \frac{h}{b}$	$rw = \frac{w}{h}$
0.5	1.00
0.6	1.50
0.7	2.33
0.8	4.00
0.9	9.00
0.99	99.00

In de buurt van $\rho = 1$ (er komen bijna evenveel mensen binnen als er geholpen kunnen worden) heeft een kleine verandering in de verhouding $\frac{h}{b}$ een enorme invloed op de gemiddelde wachttijd.

Opgaven

1. In een fabriek voor elektrische apparaten worden o.a. tachometers gemaakt. De fabricage hiervan geschiedt in 3 verschillende bedrijfsafdelingen, t.w. de fabricage-, de montage en de ijkafdeling. Men maakt 3 verschillende typen tachometers, die ieder een andere bewerkingstijd in de diverse afdelingen hebben.

type \ afdeling	fabricage	montage	ijken
I	0	0,6	0,2
II	0	0,5	0,3
III	0,8	0,4	0,4

bewerkingstijden in uren

De maximale beschikbare capaciteit in uren is voor de fabricageafdeling 160, voor de montageafdeling 400 en voor de ijkafdeling 320.
Verder is bekend dat de verschillende metertypen de volgende bijdragen tot de winst leveren: type I *f* 6,--, type II *f* 7,-- en type III *f* 10,--.

Maak een mathematisch model van dit probleem.

2. De directie van Bingel's metaalbedrijf gaat op korte termijn drie projecten in uitvoering nemen, t.w. (1) uitbreiding machinepark, (2) uitbreiding voorraden en (3) aanbouw woningen voor het personeel. Voor deze drie projecten moet resp. *f* 130.000,--, *f* 270.000,-- en *f* 420.000,-- (voor eenzelfde periode) geleend worden. Na onderhandelingen met drie plaatselijke banken ((1) de Vestburgse-, (2) de Meerwoudse- en (3) de Algemene Zeebank)) is gebleken dat de volgende rentepercentages betaald moeten worden, en dat de banken tot de volgende maxima bereid zijn leningen te verstrekken.

bank \ project	(1)	(2)	(3)	maximum bedrag
(1)	9%	12%	15%	ƒ 320.000,--
(2)	12%	9%	13%	ƒ 420.000,--
(3)	8%	8%	13%	ƒ 260.000,--

Stel een mathematisch model van dit probleem op.

3. Een fabrikant van gebreide wollen stoffen overweegt twee nieuwe stoffen in zijn produktiepakket op te nemen. In de breiafdeling staan twee soorten machines: snelle en langzame. Op de snelle machines zijn de bewerkingstijden voor de twee nieuwe stoffen resp. 6 en 16 minuten per strekkende meter en op de langzame machines zijn die tijden resp. 8 en 20 minuten per strekkende meter. De "grondstof" voor deze stoffen bestaat uit wollen draden, die op spoelen zijn gewonden. Voor de eerste - nieuwe - stof zijn per strekkende meter 10 spoelen nodig en voor de tweede stof 6. De winst is afhankelijk van de afdeling waar de stof gebreid wordt, en bedraagt voor die met de snelle machines resp. ƒ 8,50 en ƒ 1,60 en voor die met de langzame machines resp. ƒ 7,-- en ƒ 1,30 per strekkende meter. Bovendien laat de bezetting van de snelle machines toe dat overwerk verricht wordt, wat een winst oplevert van resp. ƒ 6,-- en ƒ 1,40. De capaciteiten, die nog beschikbaar zijn, zijn als volgt gegeven:

maximaal aantal spoelen per dag: 1000
maximaal aantal minuten (normaal) in de afdeling met de snelle machines, per dag: 600
maximaal aantal minuten (overwerk) in de afdeling met de snelle machines, per dag: 200
maximaal aantal minuten in de afdeling met de langzame machines, per dag: 800.

Gevraagd: maak een mathematisch model van dit probleem.

4. De aannemersmaatschappij WOBOU N.V. gaat in Zeedorp een aantal vrijstaande eengezinswoningen bouwen. De mij. heeft een programma, waarop drie soorten woningen voorkomen, t.w. een vierkamerwoning, een standaard zeskamerwoning en een luxe zeskamerwoning. De verkoopprijzen voor deze huizen bedragen resp. *f* 45.000,--, *f* 75.000,-- en *f* 90.000,--.
De gemeente Zeedorp heeft bij de aanbesteding van het complex woningen enige eisen gesteld, en wel: het totaal aantal te bouwen huizen moet minimaal 60 zijn. Het aantal kamers dat de te bouwen huizen in totaal dienen te bevatten moet minstens 270 zijn. De te bebouwen oppervlakte is ook aan restricties gebonden: het bruikbare oppervlakte is ook aan restricties gebonden: het bruikbare oppervlakte is 6450 m^2 groot. De oppervlaktes van de drie soorten huizen zijn resp. 80, 90 en 120 m^2.
De bouwkosten bedragen resp. *f* 30.000,--, *f* 50.000,-- en *f* 60.000,--.
De aannemer heeft 3 miljoen gulden aan kapitaal voor de bouw beschikbaar.

Maak een mathematisch model van dit probleem.

5. Het reisbureau Quo Vadis organiseert doorlopend weekendcruises. Men heeft de beschikking over een schip dat per cruise accomodatie biedt aan ten hoogste 1000 personen (bedienden daarbij inbegrepen). Op het schip komen alleen éénpersoonshutten voor. Er zijn twee tarieven, t.w. voor 1e klas passagiers *f* 500,-- p.p. per cruise, en voor 2e klas passagiers *f* 400,-- p.p. per cruise. Het verschil tussen de klassen wordt veroorzaakt door verschil in bediening en accomodatie. Voor de 1e klas is minstens een bediende per 2 passagiers beschikbaar en voor de 2e klas minstens een bediende per 4 passagiers. Wat de accomodatie betreft: er zijn op het schip 300 1e klas hutten en 700 2e klas hutten aanwezig.
Iedere bediende wordt een 2e klas hut toegewezen. De overige 2e klas hutten zijn voor 2e klas passagiers beschikbaar, evenals onbezette 1e klas hutten.
Een bediende kost het reisbureau *f* 300,-- per cruise.

Gevraagd: Stel een model op voor dit probleem en bereken het aantal gasten voor de cruise per klasse, waarbij de netto opbrengst per cruise voor het reisbureau maximaal is.

6. In een verffabriekje met 15 man personeel maakt men sneldrogende verven in de kwaliteit snelfa 1, snelfa 2 en supersnel. Voor de fabricage zijn o.a. de grondstoffen A en B nodig, waarvan per week resp. ten hoogste 9.000 en 11.000 kilogram gebruikt kan worden.
Voor de fabricage van 10.000 kg snelfa 1 is 2000 kg A nodig, voor 10.000 kg snelfa 2 3.000 kg A en 2.000 kg B en voor 10.000 kg supersnel 5.000 kg B.
V.w.b. de bewerkingstijden geldt het volgende: met de bereiding van 10.000 kg snelfa 1 zijn 4 mannen 1 week bezig, terwijl 3 mannen per week nodig zijn voor 10.000 kg snelfa 2, en 5 voor 10.000 kg supersnel.
De opbrengst per kilo verf is *f* 3,-- voor snelfa 1, *f* 5,-- voor snelfa 2 en *f* 4,-- voor supersnel.

Bereken het produktieprogramma met de gunstigste opbrengst (op loonkosten kan overigens niet bespaard worden).

7. De notenhandelaar Co Kos wenst zijn assortiment met een nieuwe notenmelange uit te breiden. Hij mengt daartoe rozijnen, hazelnoten en pinda's. Naar zijn idee moet het mengsel aan de volgende eisen voldoen:
(1) minstens de helft van het totaal gewicht moet uit rozijnen bestaan en
(2) hoogstens een kwart van het totaal uit pinda's.
Zoals blijkt mogen er net zoveel hazelnoten worden toegevoegd als de menger wenselijk acht. De verkoopprijs van het mengsel bedraagt *f* 5,-- per kilo. Per dag kan Co hoogstens 30 kilo hazelnoten aankopen, terwijl hij per kilo voor ieder van de grondstoffen de volgende prijzen moet betalen:

rozijnen	*f* 6,50
hazelnoten	*f* 3,50
pinda's	*f* 2,50

Gevraagd: hoeveel kilo zal Co Kos nu van zijn nieuwe mengsel maken, en in welke samenstelling, opdat zijn opbrengst minus inkoopkosten zo groot mogelijk is?

8. In Ruritania is men van plan het bestaande wegennet zodanig te verbeteren dat elk tweetal plaatsen onderling bereikbaar is via wegen van kwaliteit A.
Onderstaande tabel geeft de kosten die gemaakt worden als de weg van i naar j op kwaliteit A wordt gebracht.
Welke wegen zullen worden verbeterd als de kosten van het project worden geminimaliseerd?

	1	2	3	4	5	6
1	0	23	27	39	53	81
2	23	0	87	7	11	29
3	27	87	0	37	43	47
4	39	7	37	0	14	57
5	53	11	43	14	0	17
6	81	29	47	57	17	0

9. Bakker Jansen verkoopt tien soorten brood, die hij zelf, in vaste hoeveelheden, bakt. De bewerkingen die bij dat bakken grofweg worden onderscheiden zijn deeg maken en bakken. Voor iedere broodsoort gelden verschillende tijden voor die bewerkingen, die in de volgende tabel zijn vermeld (in minuten).

broodsoort	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
deeg maken	15	22	35	10	32	40	10	15	20	18
bakken	30	20	18	25	30	16	33	40	15	30

Daar bakker Jansen een druk beklante eenmanszaak drijft, wil hij al het brood 's ochtends voor de verkoop begint (9.00 uur) gebakken hebben. Hiermee gaat een deel van zijn welverdiende nachtrust verloren, en zoals begrijpelijk is hij daar weinig op gesteld.

In welke volgorde moet hij het brood nu bakken opdat hij zo laat mogelijk kan opstaan en wat is de totale werktijd in de bakkerij?

Opm. Het deeg maken en brood bakken dient voor iedere broodsoort apart te geschieden.

10. De N.V. Experimentele Autobouw heeft opdracht gekregen een hoogwaardige minicar te ontwerpen. Van te voren dient de directie van de N.V. aan de opdrachtgever een prognose te geven van de verwachte tijd die dit project in beslag zal nemen. De ontwerpwerkzaamheden zijn in onderstaande tabel vermeld.

nr.	omschrijving	tijdsduur in weken	volgorde beperkingen
1	basisplan opstellen	3	
2	voorontwerpen carrosserie	5	2 ← 1
3	voorontwerpen technisch gedeelte	7	3 ← 1
4	beproeving carrosserie (evt. correcties)	8	4 ← 2
5	ontwerp motor en overbrenging	8	5 ← 3
6	ontwerp overige technische onderdelen	10	6 ← 3
7	ontwerp inwendige uitvoering	7	7 ← 4
8	definitief ontwerp carrosserie	5	8 ← 4
9	beproeving overige technische onderdelen (evt. correcties)	7	9 ← 5,6
10	beproeving motor en overbrenging (evt. correcties)	12	10 ← 5
11	afwerking inwendige uitvoering	3	11 ← 5,6,7
12	afwerking carrosserie	3	12 ← 8
13	samenbouw en testen	36	13 ← 9,10,11,12
14	handleiding en instructieboek schrijven	8	14 ← 9,10,11

Gevraagd wordt nu: a) teken een netwerk, b) bepaal het kritieke pad.

11. Gegeven zijn de aselecte getallen y_i: 0,503; 0,309; 0,765; 0,437; 0,912; 0,837; 0,058; 0,561; 0,272; 0,519.
Bepaal m.b.v. deze getallen trekkingen uit:

a) de diskrete verdeling met de volgende kansen:

$P(\underline{x}=0) = 0,1$; $P(\underline{x}=2) = 0,3$; $P(\underline{x}=4) = 0,2$; $P(\underline{x}=5) = 0,1$;

$P(\underline{x}=7) = 0,3$.

b) de waarnemingen: 15, 33, 45, 28, 36, 13, 26, 22, 32, 30, 33, 45, 18, 23, 40, 38, 27, 25, 18, 22.

12. Maak een procedure die trekkingen uit een exponentiële verdeling met verwachting v levert.
De kansverdeling van de exponentieel verdeelde stochastische grootheid $\underline{x}$ (met parameter λ) worden gegeven door:

$$P(\underline{x} \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

13. Voor een zeker artikel is hieronder de verdeling van de dagelijkse vraag gegeven:

gevraagd aantal x	0	1	2	3	4	5	6	7
P(x=x)	1/4	1/4	1/8	1/8	1/16	1/16	1/16	1/16

De winkelier die dit artikel verkoopt kan iedere avond bijbestellen. Deze bestelling komt de volgende morgen bij de groothandel en wordt dan enige dagen later bij hem afgeleverd. De levertijd is stochastisch en bedraagt:

levertijd l in dagen	P($\underline{l}$=l)
1	1/4
2	1/2
3	1/4

De winkelier volgt de volgende inkooppolitiek:

als de economische voorraad (dat is de aanwezige voorraad plus datgene wat reeds besteld maar nog niet binnengekomen is) minder is dan s besteld hij bij tot S (s < S).

Aan het voorraadhouden zijn kosten verbonden, en wel *f* 2,50 per stuk per dag over de voorraad aan het einde van een dag.
Voorts zijn er bestelkosten: *f* 5,-- per bestelling. De kosten van neen-verkoop bedragen *f* 10,-- per stuk.
De winkelier wil graag de kosten van zijn (s,S)-politiek weten.

Opgave: Maak een blokschema voor een simulatie van bovenstaand probleem, dat de kosten van de (s,S)-politiek berekend.

14. De nieuwe politieke partij ABC 71 gaat aan de komende verkiezingen meedoen. De plaatselijke voorzitter van het stadje Haspelen heeft daartoe voor zijn stad een ledenwerfcampagne ontworpen. Hij heeft 6 ABC-volgelingen bereid gevonden door weer en wind voor hun politieke overtuiging op pad te gaan om nieuwe leden voor de partij te werven. De voorzitter heeft de stad in 4 wijken verdeeld, en gaat nu aan elke ledenwerver een wijk aanwijzen. Hij schat het aantal nieuwe leden in de verschillende wijken bij verschillend aantal ledenwervers als volgt:

Aantal ledenwervers	Wijk			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	25	20	33	13
2	42	38	43	24
3	55	54	47	32
4	63	65	50	39
5	69	73	52	45
6	74	80	53	50

Gebruik dynamische programmering om de beste verdeling van de 6 ledenwervers over de vier wijken te bepalen.

15. Een ondernemende jonge statisticus gelooft een nieuw casinokrakend goksysteem ontdekt te hebben. Zijn vrienden lachen hem echter uit. Om hem te overtuigen van de nutteloosheid van zijn veronderstellingen sluiten zij een weddenschap af.
Zij wedden dat hij, startend met 3 fiches, na 3 spellen geen 5 fiches of meer zal hebben. In elk spel kan hij een of meer van de fiches in zijn bezit inzetten. Wint hij, dan krijgt hij zijn dubbele inzet uitbetaald. De statisticus gelooft, dat zijn kans op succes per spel 2/3 is.

Wat moet hij in elk spel inzetten opdat, aangenomen dat deze kans op succes inderdaad 2/3 is, zijn kans om de weddenschap te winnen zo groot mogelijk is.

16. De frekwente cafébezoeker Kobus Gokker speelt met zijn maat Jan de Kraker graag het volgende dobbelspel. Om de beurt maakt een speler een serie van hoogstens zes worpen met één dobbelsteen, maar hij mag ook eerder ophouden. De laatste worp van de serie is bepalend voor de uitkomst van het spel. Wordt bij die laatste worp een zes gegooid, dan behoeft de werper niet te betalen en hij ontvangt ook niets, tenzij die laatste worp juist de zesde is: hij ontvangt dan ƒ 3,60. Gooit hij bij de laatste worp echter een lager aantal ogen x, dan moet hij betalen, en wel een zeker bedrag y per punt verschil met 6 (dus (6-x)y). Die bedragen y verschillen voor iedere worp en luiden:

eerste worp y = 1 ct.	vierde worp y = 8 ct.
tweede worp y = 2 ct.	vijfde worp y = 16 ct.
derde worp y = 4 ct.	zesde worp y = 32 ct.

Bepaal m.b.v. dynamische programmering wanneer Kobus moet ophouden, als hij zich aan kostenminimalisatie houdt.

17. In een produktieproces is een constante behoefte naar fenolan. De benodigde hoeveelheid is 25 hl./maand. Het opzetten van de produktie van fenolan kost iedere keer ƒ 1500,--. De voorraadkosten per hl. bedragen iedere maand 30 gulden.

Bepaal de optimale produktiegrootte Q^*, en de daarbij behorende variabele kosten per maand.
Bereken deze kosten tevens voor $Q = .5\ Q^*$, $Q = 2\ Q^*$, en $Q = 10\ Q^*$.

Leerboeken op O.R.-gebied

Churchman, C.W., Ackoff, R.L. and Arnoff, E.L.
Introduction to Operations Research,
John Wiley, New York, 1957.

Ackoff, R.L. and Sasieni, M.W.
Fundamentals of Operations Research,
John Wiley, New York, 1968.

Hillier, F.S. and Liberman, G.J.
Introduction to Operations Research,
Holden-Day, San Francisco, 1967.

Wagner, H.M.
Principles of Operations Research, with applications,
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969.

Kaufmann, A.
Méthodes et Modèles de la Recherche Opérationelle,
Dunod, Paris, 1959.

Leergang Besliskunde
M.C. Syllabus 1...8
Mathematisch Centrum, Amsterdam.

Inleidende boeken op O.R.-gebied

Duckworth, W.E.
Wat is Operationele Research,
Marka 12, Het Spectrum, Utrecht.

Burg, A.R. v.d.
De beste beslissing nemen,
Samsom, Alphen a/d Rijn, 1963.

Battersby, A.
De wiskunde in de bedrijfsvoering,
Marka 107, Het Spectrum, Utrecht.

Theil, H., Boot, J.C.G. en Kloek, T.
Voorspellen en beslissen,
Marka 9, Het Spectrum, Utrecht.

Kaufmann, A. en Faure, R.
Operationele Research,
Marka 17, Het Spectrum, Utrecht.

Lombaers, Meinardi, Ravestijn (ed)
Operationele Research in Nederland,
Marka 104, Het Spectrum, Utrecht.